**ΤΑΞΗ:** 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

---

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 76

**Α2.** α→Σ, β→Λ, γ→Λ, δ→Σ, ε→Σ.

**Α3.** **α.** $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)dx$

**β.** $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

**γ.** Αν διαιρέσουμε την συχνότητα $v_i$ μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος προκύπτει **η σχετική συχνότητα** της τιμής $x_i$.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

| Πλήθος λανθασμένων απαντήσεων $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Αθροιστική συχνότητα $N_i$ | Σχετική συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$ | $x_i \cdot v_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 13 | 13 | 26 | 26 | 0 |
| 1 | 14 | 27 | 28 | 54 | 14 |
| 2 | 13 | 40 | 26 | 80 | 26 |
| 3 | 5 | 45 | 10 | 90 | 15 |
| 4 | 5 | 50 | 10 | 100 | 20 |
| **ΣΥΝΟΛΑ** | **50** | | **100** | | **75** |

**Β2.** Η μέση τιμή θα είναι $\bar{x} = \dfrac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 + v_5x_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} = \dfrac{75}{50} = 1,5.$

**Β3.** Αφού έχουμε 50 παρατηρήσεις και είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά , τότε μεσαίες παρατηρήσεις είναι η 25$^{η}$ και η 26$^{η}$. Και οι δυο είναι ίσες με 1, οπότε $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$.

Η επικρατούσα τιμή είναι και αυτή 1, αφού αυτή η τιμή έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

**Β4.** Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι τουλάχιστον τρεις λανθασμένες απαντήσεις, δηλαδή 3 ή 4 λανθασμένες απαντήσεις, έδωσαν 5+5=10 μαθητές.

**Β5.** Από την στήλη αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του πίνακα συχνοτήτων διαπιστώνουμε ότι το πολύ δύο λανθασμένες απαντήσεις έδωσε το 80% των μαθητών.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}-7\right) = \lim_{x\to2^-}\left[\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-7\right] =$$

$$= \lim_{x\to2^-}\left[\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\cancel{x+2-4}}-7\right] = \lim_{x\to2^-}\left[\left(\sqrt{x+2}+2\right)-7\right] = \sqrt{2+2}+2-7 =$$

$$= 2+2-7 = -3.$$

**Γ2.**

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{ax^2}{4}-2a^2\right) = \frac{a\cdot2^2}{4}-2a^2 = a-2a^2.$$

**Γ3.** Πρέπει $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -3 = a-2a^2 \Leftrightarrow 2a^2-a-3=0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot2(-3) = 1+24 = 25$,

$$\alpha = \frac{1\pm5}{4} \begin{array}{l} \nearrow \frac{3}{2} \\ \searrow -1 \end{array}$$

Δεκτή η $\alpha = -1$ αφού $\alpha < 0$.

**Γ4.** Για $\alpha = -1$ έχω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}-7, & x<2 \\ -\dfrac{x^2}{4}-2, & x\ge2 \end{cases}$.

Άρα

$$\int_2^4 -\frac{f(x)}{x}dx = \int_2^4\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+2\ln x\right]_2^4 = \left(\frac{1}{8}\cdot 4^2+2\ln 4\right)-\left(\frac{1}{8}\cdot 2^2+2\ln 2\right)=$$
$$=2+4\ln 2-\frac{1}{2}-2\ln 2=\frac{3}{2}+2\ln 2.$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f'(x)=\left(x^3-\alpha x^2+\beta x\right)'=3x^2-2\alpha x+\beta$.

Αφού είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ακρότατο το 0 αν $x_1=3$ θα είναι $f'(3)=0$ και f(3)=0.

**Δ2.** Έχω
$$\left.\begin{array}{l} f'(3)=0 \\ f(3)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 3\cdot 3^2-2\alpha\cdot 3+\beta=0 \\ 3^3-\alpha\cdot 9+3\beta=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|l} -6\alpha+\beta=-27 & \\ -9\alpha+3\beta=-27 & :(-3) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} -6\alpha+\beta=-27 \\ 3\alpha-\beta=9 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{cases} -3\alpha=-18 \\ \beta=-27+6\alpha \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=9 \end{cases}.$$

**Δ3.** Αν α=6 και β=9 είναι:

**i.** $f(x)=x^3-6x^2+9x \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$.

Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή x=3.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f(x) φαίνονται στο πίνακα:

| x | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | τ.μ. | ↘ | τ.ε. | ↗ |

Άρα $f\uparrow(-\infty,1]$, $f\downarrow[1,3]$ και $f\uparrow[3,+\infty)$.

**ii.** Έχει τ.μ. το $f(1)=1^3-6\cdot 1^2+9\cdot 1=4$ και τ.ε. το $f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0$

**iii.** Είναι $f'(x)=3x^2-12x+9<0$ για 1<x<3.

Άρα $E=\int_1^3 -f'(x)dx=\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3=$
$=(-27+54-27)-(-1+6-9)=0-(-4)=4$ τ.μ.